a

Podzielność liczb

Uwaga: Lekcja ociera się o dział matematyki zwany *teorią liczb*. Temat zawiera duże ilości nowych pojęć, twierdzeń i zależności[[1]](#footnote-1). Wchodzisz na własne ryzyko.

W temacie o dzieleniu napotkaliśmy na problem, próbując rozłożyć 7 kamieni na 3 równe grupy. Z drugiej strony podzielenie 15 ziemniaków pomiędzy 3 gości nie sprawiło większych trudności. Na czym polega różnica?[[2]](#footnote-2)

Trochę słownictwa

Intuicje

Istotna różnica jest taka, że 7 : 3 to przykład dzielenia z resztą, a 15 : 3 to dzielenie bez reszty. Mówimy, że 7 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3 lub inaczej, że nie *dzieli się* przez 3. Z kolei 15 dzieli się przez 3, ponieważ dzielenie 15 : 3 nie daje reszty. Mówimy, że liczba jest *podzielna* przez drugą liczbę, jeśli nie daje reszty przy dzieleniu.

* 15 jest podzielne przez 3, ponieważ 15 : 3 = 5
* 7 nie jest podzielne przez 3, ponieważ 7 : 3 = 2 r. 1
* 20 jest podzielne przez 10, ponieważ 20 : 10 = 2
* 20 nie jest podzielne przez 9, ponieważ 20 : 9 = 2 r. 2

Matematycy używają czasem też sformułowania, że jedna liczba *dzieli* drugą liczbę. Powiedzą więc, że

* 3 dzieli 15
* 10 dzieli 20
* 3 nie dzieli 7
* 9 nie dzieli 20

Ponieważ zapisanie sześcioliterowego słowa „dzieli” przerasta ambicje matematyków, wprowadzono w jego miejsce symbol | . Z kolei zamiast słownego „nie dzieli” mamy symbol . Wbrew pozorom nie jest to litera ł. Jest to przekreślona pionowa kreska. To istotna różnica. Powyższe stwierdzenia możemy zapisać symbolicznie:

* 3 | 15
* 10 | 20
* 3 7[[3]](#footnote-3)
* 9 20[[4]](#footnote-4)

Cechy podzielności

Intuicje

W jaki sposób stwierdzić, że jedna liczba jest podzielna przez drugą? Możemy spróbować wykonać dzielenie i sprawdzić, czy otrzymamy resztę. Zobaczmy dla przykładu, jak to jest z dzieleniem przez 2.

* 1 nie jest podzielne przez 2, bo 1 : 2 = 0 r. 1
* 2 jest podzielne przez 2, bo 2 : 2 = 1
* 3 nie jest podzielne przez 2, bo 3 : 2 = 1 r. 1
* 4 jest podzielne przez 2, bo 4 : 2 = 2
* 5 nie jest podzielne przez 2, bo 5 : 2 = 2 r. 1
* 6 jest podzielne przez 2, bo 6 : 2 = 3
* 7 nie jest podzielne przez 2, bo 7 : 2 = 3 r. 1
* 8 jest podzielne przez 2, bo 8 : 2 = 4
* 9 nie jest podzielne przez 2, bo 9 : 2 = 4 r. 1
* 10 jest podzielne przez 2, bo 10 : 2 = 5

Nasuwa się pewna tendencja – kolejne liczby są na przemian podzielne przez 2 i niepodzielne przez 2. Ponieważ problem podzielności przez 2 pojawia się w matematyce stosunkowo często, wprowadzono dodatkowe nazwy:

* *liczba parzysta* to liczba podzielna przez 2
* *liczba nieparzysta* to liczba niepodzielna przez 2

Gdy nabierzemy wprawy, jesteśmy w stanie bez wykonania dzielenia stwierdzić, czy dana liczba jest podzielna, czy też nie. Pomagają nam w tym cechy podzielności.

* Cecha podzielności przez 1:

Każda liczba jest podzielna przez 1.

Co do tego raczej nie ma wątpliwości. Gdy podzielimy dowolną liczbę przez 1, otrzymamy tą samą liczbę.

* Cecha podzielności przez 2:

Liczba jest podzielna przez 2 wtedy i tylko wtedy, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 lub 8.

* 18 jest podzielne przez 2, ponieważ ostatnią cyfrą jest 8.
* 10000 jest podzielne przez 2, ponieważ ostatnią cyfrą jest 0.
* 23 789 264 jest podzielne przez 2, ponieważ ostatnią cyfrą jest 4.
* Cecha podzielności przez 3:

Liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3.

* 123 jest podzielne przez 3, ponieważ 1 + 2 + 3 = 6 jest podzielne przez 3.
* 3000 jest podzielne przez 3, ponieważ 3 + 0 + 0 + 0 = 3 jest podzielne przez 3.
* 100 010 001 jest podzielne przez 3, ponieważ 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 3 jest podzielne przez 3.
* Cecha podzielności przez 4:

Liczba jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4.

Zasada ta jest pomocna tylko w przypadku liczb trzycyfrowych lub większych.

* 124 jest podzielne przez 4, ponieważ 24 jest podzielne przez 4.
* 1000 jest podzielny przez 4, ponieważ 0[[5]](#footnote-5) jest podzielne przez 4.
* 12 894 782 712 jest podzielne przez 4, ponieważ 12 jest podzielne przez 4.
* Cecha podzielności przez 5:

Liczba jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.

* 125 jest podzielne przez 5, ponieważ ostatnią cyfrą jest 5.
* 10 000 jest podzielne przez 5, ponieważ ostatnią cyfrą jest 0.
* 4 847 968 475 jest podzielne przez 5, ponieważ ostatnią cyfrą jest 5.
* Cecha podzielności przez 8:

Liczba jest podzielna przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy jej trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 8.

Zasada ta jest pomocna tylko w przypadku liczb czterocyfrowych lub większych.

* 1008 jest podzielne przez 8, ponieważ 8 jest podzielne przez 8.
* 100 024 jest podzielne przez 8, ponieważ 24 jest podzielne przez 8.
* 224 797 438 128 jest podzielne przez 8, ponieważ 128 jest podzielne przez 8.
* Cecha podzielności przez 9:

Liczba jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

* 153 jest podzielne przez 9, ponieważ 1 + 5 + 3 = 9 jest podzielne przez 9.
* 111 111 111 jest podzielne przez 9, ponieważ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9 jest podzielne przez 9.
* 123 456 789 jest podzielne przez 9, ponieważ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 jest podzielne przez 9.
* Cecha podzielności przez 10:

Liczba jest podzielna przez 10 wtedy i tylko wtedy, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0.

* 20 jest podzielne przez 10, ponieważ ostatnią cyfrą jest 0.
* 1 000 000 jest podzielny przez 10, ponieważ ostatnią cyfrą jest 0.
* 364 683 980 jest podzielne przez 10, ponieważ ostatnią cyfrą jest 0.

Tajemnicze może wydawać się milczenie na temat cechy podzielności przez 6. Zauważmy, że 6 = 2 ⋅ 3. Wypiszmy kilka początkowych liczb naturalnych. W pierwszym rządku wyróżnimy liczby podzielne przez 2, w drugim rządku liczby podzielne przez 3, a w trzecim liczby podzielne przez 6.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | **2** | 3 | **4** | 5 | **6** | 7 | **8** | 9 | **10** | 11 | **12** | 13 | **14** | 15 | **16** | 17 | **18** | 19 | **20** | 21 | **22** | 23 | **24** | 25 | **26** | 27 | **28** | 29 | **30** |
| 1 | 2 | **3** | 4 | 5 | **6** | 7 | 8 | **9** | 10 | 11 | **12** | 13 | 14 | **15** | 16 | 17 | **18** | 19 | 20 | **21** | 22 | 23 | **24** | 25 | 26 | **27** | 28 | 29 | **30** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | **6** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | **12** | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | **18** | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | **24** | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | **30** |

Widzimy, że jeśli liczba jest podzielna przez 2 i jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3.

* 24 jest podzielne przez 6, ponieważ ostatnią cyfrą jest 4, a suma cyfr 2 + 4 = 6 jest podzielna przez 3.
* 330 jest podzielne przez 6, ponieważ ostatnią cyfrą jest 0, a suma cyfr 3 + 3 + 0 = 6 jest podzielna przez 3.
* 14718 jest podzielne przez 6, ponieważ ostatnią cyfrą jest 8, a suma cyfr 1 + 4 + 7 + 1 + 8 = 21 jest podzielna przez 3.

Podobne reguły możemy tworzyć samodzielnie także dla innych liczb. Przykładowo 15 = 3 ⋅ 5, więc

Liczba jest podzielna przez 15 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 3 i przez 5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | **3** | 4 | 5 | **6** | 7 | 8 | **9** | 10 | 11 | **12** | 13 | 14 | **15** | 16 | 17 | **18** | 19 | 20 | **21** | 22 | 23 | **24** | 25 | 26 | **27** | 28 | 29 | **30** |
| 1 | 2 | **3** | 4 | **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | **10** | 11 | 12 | 13 | 14 | **15** | 16 | 17 | 18 | 19 | **20** | 21 | 22 | 23 | 24 | **25** | 26 | 27 | 28 | 29 | **30** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | **15** | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | **30** |

Tak samo

Liczba jest podzielna przez 14 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 7.

Niestety… nie powiedzieliśmy, jaka jest cecha podzielności przez 7. To trochę trudniejszy temat.

Rozszerzenie

[wymagana znajomość tematu: Potęgowanie]

Mając nieco większy zasób wiedzy, możemy wprowadzić więcej cech podzielności.

* Cecha podzielności przez 7:

Oznaczmy pozycję cyfry jedności jako 0, pozycję cyfry dziesiątek jako 1 itd. Liczba jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy podzielna przez 7 jest suma cyfr mnożonych przez , gdzie n jest pozycją danej cyfry.

* Weźmy liczbę 91.
  + Cyfra 1 ma pozycję 0, więc mnożymy ją przez :
  + Cyfra 9 ma pozycję 1, więc mnożymy ją przez :

Dodajemy otrzymane wyniki: . Liczba 28 jest podzielna przez 7, więc również 91 jest podzielne przez 7.

* Weźmy liczbę 1547.
  + Cyfra 7 ma pozycję 0, więc mnożymy ją przez :
  + Cyfra 4 ma pozycję 1, więc mnożymy ją przez :
  + Cyfra 5 ma pozycję 2, więc mnożymy ją przez :
  + Cyfra 1 ma pozycję 3, więc mnożymy ją przez :

Dodajemy otrzymane wyniki: . Liczba 91 jest podzielna przez 7, więc 1547 jest podzielne przez 7.

* 7000 jest podzielne przez 7, ponieważ jest podzielne przez 7.
* Cecha podzielności przez 11:

Oznaczmy pozycję cyfry jedności jako 0, pozycję cyfry dziesiątek jako 1 itd. Liczba jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr o pozycjach parzystych pomniejszona o sumę cyfr o pozycjach nieparzystych jest podzielna przez 11.

* Weźmy liczbę 649. Cyfry o pozycjach parzystych to 9 i 6. Ich suma wynosi 9 + 6 = 15. Cyfra o pozycji nieparzystej to 4. Odejmujemy: 15 – 4 = 11. Wynik jest podzielny przez 11, więc 649 jest podzielne przez 11.
* Weźmy liczbę 24 574. Cyfry o pozycjach parzystych to 4, 5 i 2. Ich suma wynosi 11. Cyfry o pozycjach nieparzystych to 7 i 4. Ich suma wynosi 11. Odejmujemy: 11 – 11 = 0. Wynik jest podzielny przez 11, więc 24 574 jest podzielne przez 11.
* 5093 jest podzielne przez 11, ponieważ 3 + 0 – (9 + 5) = –11 jest podzielne przez 11.

Cechy podzielności przez 7, 11 i 9 to szczególne przypadki ogólniejszego twierdzenia:

Oznaczmy pozycję cyfry jedności jako 0, pozycję cyfry dziesiątek jako 1 itd. Liczba daje resztę z dzielenia przez taką samą, jak reszta z dzielenia przez sumy cyfr mnożonych przez , gdzie n jest pozycją danej cyfry.

Dowód tego twierdzenia jest dość skomplikowany.

Dowód

[wymagana znajomość tematu: Ciąg geometryczny]

[wymagana znajomość tematu: Indukcja matematyczna]

Co tak naprawdę mówi twierdzenie? Weźmy dla przykładu i rozważmy liczbę 158. Reszta z dzielenia 158 przez wynosi 6, ponieważ 158 : 8 = 19 r. 6. „Suma cyfr mnożonych przez ” oznacza tyle, że 157 rozbijamy na cyfry, każdą mnożymy przez odpowiednią potęgę liczby , a potem dodajemy wyniki.

Cyfra 8 ma pozycję 0, więc mnożymy ją przez . Dostajemy .

Cyfra 5 ma pozycję 1, więc mnożymy ją przez . Dostajemy .

Cyfra 1 ma pozycję 2, więc mnożymy ją przez . Dostajemy .

Razem: 8 + 10 + 4 = 22. Reszta z dzielenia 22 przez 8 wynosi 6, bo 22 : 8 = 2 r. 6. Obydwie reszty są równe – za sprawą magii twierdzenia. Tak samo będzie dla dowolnego innego i dowolnej innej liczby.

Jak udowodnić to twierdzenie? Z pomocą przychodzi indukcja matematyczna. Bierzemy dowolne i sprawdzamy, że twierdzenie jest prawdziwe, gdy rozpatrujemy liczbę 0. Krok indukcyjny jest taki: jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby , to jest też prawdziwe dla .

W powyższym przykładzie: Twierdzenie jest prawdziwe dla 158. Gdy weźmiemy 159, to jej reszta z dzielenia przez jest o 1 większa i wynosi 7. Cyfry tej liczby zmieniły się tak, że cyfra jedności 8 zwiększyła się o 1 i wynosi 9. W takim razie suma mnożonych cyfr zwiększy się o , czyli o 1, a więc reszta z dzielenia także wzrośnie o 1 – twierdzenie jest prawdziwe.

W tym przypadku nie było trudno, ponieważ zarówno liczba, jak i suma cyfr wzrosły o 1. Gdy rozpatrzymy liczbę jeszcze o 1 większą, dostaniemy 160. Tu zmiany w cyfrach są bardziej drastyczne: cyfra jedności 9 zamieniła się na 0, a cyfra dziesiątek wzrosła o 1. W takim razie suma cyfr mnożonych różni się o , czyli jest mniejsza o 7, więc wynosi 0. Okazuje się, że obydwie reszty z dzielenia są równe.

Istotą dowodu będzie uchwycić, jak zmieniają się cyfry liczby podczas zwiększania jej o 1.

Weźmy dowolne . Teza jest prawdziwa dla liczby 0. Reszta z dzielenia liczby 0 przez wynosi 0, a reszta z dzielenia przez liczby też wynosi 0. **[[6]](#footnote-6)[?]**

Udowodnimy, że jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla liczby, to jest też prawdziwe dla . Wtedy na mocy indukcji matematycznej twierdzenie będzie prawdziwe dla dowolnego .**[[7]](#footnote-7)[?]**

Weźmy dowolną liczbę , dla której twierdzenie jest prawdziwe. Można ją zapisać w postaci

gdzie są cyframi tej liczby.**[[8]](#footnote-8)[?]** Z założenia reszta z dzielenia przez jest taka sama, jak reszta z dzielenia przez liczby

**[[9]](#footnote-9)[?]**

Weźmy liczbę . Jeśli , to liczbę tę zapisujemy jako

**[[10]](#footnote-10)[?]**

Wtedy

**[[11]](#footnote-11)[?]**

Jeśli , to reszta z dzielenia przez jest taka sama, jak reszta z dzielenia przez i wynosi 0. W przeciwnym razie obie reszty są równe . Teza jest prawdziwa.

Jeśli , oznaczamy przez największą liczbę, dla której .**[[12]](#footnote-12)[?]** Wtedy liczbę można zapisać w postaci

**[[13]](#footnote-13)[?]**

Jeśli , to reszta z dzielenia tej liczby przez wynosi 0. W przeciwnym razie reszta wynosi . Bierzemy liczbę

Możemy zapisać

**[[14]](#footnote-14)[?]**

Ze wzoru na szereg geometryczny mamy:

Mając na uwadze, że to to samo, co

stwierdzamy, że liczba jest całkowita. Jest ona podzielna przez , co oznacza, że reszta z dzielenia liczby przez jest taka sama, jak reszta z dzielenia liczby przez . Jeśli reszta z dzielenia przez wynosi , to poszukiwana reszta wynosi 0, w przeciwnym razie wynosi . Oznacza to, że reszta z dzielenia przez liczby jest taka sama, jak reszta z dzielenia przez liczby .

Mając to twierdzenie, możemy udowodnić cechy podzielności przez 7, 9, 11 i 3.

* Z cechą podzielności przez 7 jest łatwo: w formule twierdzenia wystarczy wstawić w miejsce liczbę 7 i otrzymamy żądaną cechę.
* Jeśli w miejsce wstawimy liczbę 9, twierdzenie będzie brzmiało:

Oznaczmy pozycję cyfry jedności jako 0, pozycję cyfry dziesiątek jako 1 itd. Liczba daje resztę z dzielenia przez taką samą, jak reszta z dzielenia przez sumy cyfr mnożonych przez , gdzie n jest pozycją danej cyfry.

Ponieważ mnożenie przez 1 nic nie zmienia, wystarczy nam sumować cyfry danej liczby.

* Jeśli wstawimy w miejsce liczbę 11, twierdzenie będzie brzmiało:

Oznaczmy pozycję cyfry jedności jako 0, pozycję cyfry dziesiątek jako 1 itd. Liczba daje resztę z dzielenia przez taką samą, jak reszta z dzielenia przez sumy cyfr mnożonych przez , gdzie n jest pozycją danej cyfry.

Jest to równoważne z tym, że liczby o pozycjach parzystych bierzemy ze znakiem +, a liczby o pozycjach nieparzystych bierzemy ze znakiem –.

* Z podzielnością przez 3 jest trochę ciekawiej. Wynika ona z przypadku dla :

Liczba daje resztę z dzielenia przez taką samą, jak suma cyfr tej liczby.

Gdy liczba jest podzielna przez 3, daje resztę 0, 3 lub 6 z dzielenia przez 9. Wtedy suma cyfr daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, czyli także jest podzielna przez 3. To samo w drugą stronę: jeśli suma cyfr liczby jest podzielna przez 3, to liczba też jest podzielna przez 3.

Twierdzenie to pozwala stworzyć cechę podzielności przez dla dowolnego . Nie zawsze jednak tak sformułowana cecha podzielności ma praktyczną użyteczność, zwłaszcza gdy jest duże. Czasem bardziej praktyczne jest inne ujęcie cechy podzielności. Na przykład dla pewnych przypadków:

Liczba jest podzielna przez wtedy i tylko wtedy, gdy jej ostatnich cyfr tworzy liczbę podzielną przez .

Dowód

Spójrzmy, czemu tak się dzieje. Weźmy dla przykładu , czyli cechę podzielności przez 4. Gdy chcemy stwierdzić, że liczba 324 jest podzielna przez 4, wystarczy spojrzeć na 2 ostatnie cyfry, ponieważ 324 = 300 + 24 = 3 ⋅ 100 + 24 = 3 ⋅ 4 ⋅ 25 + 24. Widzimy, że wszystko oprócz 24, czyli cząstka 300, jest podzielne przez 4. W takim razie podzielność liczby przez 4 zależy tylko od dwóch ostatnich cyfr. Podobnie 2566340 = 2566300 + 40 = 25663 ⋅ 100 + 40 = 25663 ⋅ 4 ⋅ 25 + 40, a więc cząstka 2566300 jest podzielna przez 4. Podobnie będzie dla innych , przykładowo dla mamy 746320 = 746000 + 320 = 746 ⋅ 1000 + 320 =

746 ⋅ 8 ⋅ 125 + 320, a więc cząstka 746000 jest podzielna przez 8.

Weźmy dowolną liczbę . Można ją zapisać w postaci

gdzie są cyframi tej liczby.**[[15]](#footnote-15)[?]** Jeśli , to liczba utworzona przez ostatnich cyfr tej liczby jest równa i twierdzenie jest prawdziwe.**[[16]](#footnote-16)[?]** Gdy , liczba utworzona przez ostatnich cyfr ma postać

Wtedy:

Mamy więc

gdzie jest liczbą podzielną przez .

Jeśli , to prawa strona równości jest podzielna przez , więc lewa strona też jest podzielna przez , mamy więc . Jeśli , to w równości , lewa strona jest podzielna przez , więc prawa strona też jest podzielna przez , mamy więc . A zatem

Z tego twierdzenia wynikają cechy podzielności przez 2, 4, 8 itd. Podobnie cecha podzielności przez 5 wynika z ogólniejszego twierdzenia:

Liczba jest podzielna przez wtedy i tylko wtedy, gdy jej ostatnich cyfr tworzy liczbę podzielną przez .

Dowód

Dowód przebiega analogicznie jak w przypadku poprzedniego twierdzenia.

Weźmy dowolną liczbę . Można ją zapisać w postaci

gdzie są cyframi tej liczby. Jeśli , to liczba utworzona przez ostatnich cyfr tej liczby jest równa i twierdzenie jest prawdziwe. Gdy , liczba utworzona przez ostatnich cyfr ma postać

Wtedy:

Mamy więc

gdzie jest liczbą podzielną przez .

Jeśli , to prawa strona równości jest podzielna przez , więc lewa strona też jest podzielna przez , mamy więc . Jeśli , to w równości , lewa strona jest podzielna przez , więc prawa strona też jest podzielna przez , mamy więc . A zatem

Dzielniki liczby

Intuicje

Nazewnictwa ciąg dalszy. Filozofia jest taka: Jeśli jedna liczba dzieli drugą, to mówimy, że jest jej dzielnikiem.

* Dzielniki liczby 12 to 1, 2, 3, 4, 6 i 12.
* Dzielniki liczby 16 to 1, 2, 4, 8 i 16.
* Dzielniki liczby 60 to 1, 2, 3, 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30 i 60.
* Dzielniki liczby 7 to 1 i 7.

Poszukiwanie dzielników liczby to tak na prawdę pytanie[[17]](#footnote-17), na ile równych grupek możemy podzielić stertę kamieni. Gdy weźmiemy kupkę 60 kamieni, możemy to zrobić na całkiem sporo sposobów – możemy dzielić kamienie na 1 grupkę (nie dzielić wcale), dzielić na 2 grupki, 3 grupki itd. aż w końcu położymy każdy kamień osobno, czyli rozłożymy stertę na 60 grupek.

Z drugiej strony, gdy weźmiemy 7 kamieni, nasze możliwości są ograniczone. Możemy jedynie zostawić kupkę w spokoju albo rozłożyć każdy kamień osobno.

Bez względu na to, ile weźmiemy kamieni na naszą stertę, za każdym razem na pewno możemy:

* Zostawić stertę w spokoju, czyli inaczej mówiąc rozdzielić ją na jedną grupkę.
* Położyć każdy z tych kamieni osobno, czyli rozdzielić stertę na tyle grupek, ile było kamieni na stercie.

Dochodzimy do dość istotnego spostrzeżenia:

Każda liczba dzieli się przez 1 oraz samą siebie.

Wyjątkiem jest liczba 0. Zera przez zero dzielić nie wolno.

Rozszerzenie

*Dzielnikiem właściwym* liczby nazywamy każdy dzielnik tej liczby oprócz jej samej.

* Dzielniki właściwe liczby 12 to 1, 2, 3, 4 i 6.
* Dzielniki właściwe liczby 16 to 1, 2, 4 i 8.
* Dzielnikiem właściwym liczby 7 jest 1.

Fascynujące to to nie jest, ale daje podstawę do ciekawszego zagadnienia.

*Liczba doskonała* to liczba będąca sumą swoich dzielników właściwych.

* 6 jest liczbą doskonałą. Dzielniki właściwe szóstki to 1, 2 i 3, a 1 + 2 + 3 = 6.
* 28 jest liczbą doskonałą. Dzielniki właściwe 28 to 1, 2, 4, 7 i 14, a 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.
* 496 jest liczbą doskonałą, ponieważ dzielniki właściwe 496 to 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 i 248, a 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496.

Magia. Sprawa jest tym bardziej ciekawa, że 6, 28, 496 i jeszcze kilka dalszych liczb doskonałych to liczby parzyste. Matematycy nie mają pojęcia, czy istnieje nieparzysta liczba doskonała. Jeśli taką znajdziesz, nie ukrywaj się z tym. Prawdopodobnie czeka Cię chwała, sława i pieniądze. Miej jednak na uwadze, że liczba taka ma przynajmniej 1500 cyfr. Wszystkie mniejsze matematycy już zdyskwalifikowali. Natknęliśmy się na pierwszy nierozwiązany[[18]](#footnote-18) problem matematyki:

Czy istnieje nieparzysta liczba doskonała?

To naprawdę poważna sprawa. Wyobraź sobie, że żaden tęgi umysł przez tysiąclecia istnienia cywilizacji nie rozgryzł tego problemu, chociaż liczby doskonałe interesowały już starożytnych Greków. Z dzielnikami właściwymi wiąże się jeszcze jedna ciekawostka:

*Liczby zaprzyjaźnione* to takie dwie liczby, że każda jest sumą dzielników właściwych drugiej.

* 220 i 284 to liczby zaprzyjaźnione. Dzielniki właściwe 220 to 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, a 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284. Dzielniki właściwe 284 to 1, 2, 4, 71, 142, a 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.
* 1184 i 1210 to liczby zaprzyjaźnione. Dzielniki właściwe 1184 to 1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296, 592, a 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210. Dzielniki właściwe 1210 to 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605, a 1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184.

To jeszcze bardziej magiczne i jeszcze bardziej niepojęte. Na tyle magiczne i na tyle niepojęte, że matematycy nie dali rady z odpowiedzią na pytania:

Czy istnieją liczby takie zaprzyjaźnione, że jedna jest parzysta, a druga nieparzysta?

oraz

Czy par liczb zaprzyjaźnionych jest nieskończenie wiele?

Oto dwa kolejne nierozwiązane problemy matematyki. Bądź pierwszy – pokaż, na co cię stać.

Liczby pierwsze

Intuicje

Zauważyliśmy pewną niesforność sterty liczącej 7 kamieni. Oprócz banalnego podziału na 1 grupkę lub 7 grupek, nie jesteśmy w stanie nic z nią zrobić. Podobnie byłoby, gdyby wziąć stertę 3 kamieni, 5 kamieni, albo 11 kamieni… Za każdym razem jedyne co możemy, to zostawić stertę taką, jak ją Pan Bóg stworzył, albo rozrzucić wszystkie kamienie w cały świat. Gdy liczba ma tylko dwa dzielniki: 1 oraz samą siebie, mówimy, że jest liczbą pierwszą. Kilka początkowych liczb pierwszych[[19]](#footnote-19) to:

2, 3, 5, 7, 8, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Liczby pierwsze to bardzo niesforne istoty. Ze względu na to, że na nic się nie dzielą, nazywa się je czasem atomami[[20]](#footnote-20) wśród liczb.

Jeśli liczba jest iloczynem co najmniej dwóch liczb pierwszych, to jest *liczbą złożoną*. Każda liczba złożona ma więcej niż dwa dzielniki.

* 4 jest liczbą złożoną, ponieważ 4 = 2 ⋅ 2. Dzielniki 4 to 1, 2, 4.
* 6 jest liczbą złożoną, ponieważ 6 = 2 ⋅ 3. Dzielniki 6 to 1, 2, 3, 6.
* 8 jest liczbą złożoną, ponieważ 8 = 2 ⋅ 2 ⋅ 2. Dzielniki 8 to 1, 2, 4, 8.
* 9 jest liczbą złożoną, ponieważ 9 = 3 ⋅ 3. Dzielniki 9 to 1, 3, 9.
* 10 jest liczbą złożoną, ponieważ 10 = 2 ⋅ 5. Dzielniki 10 to 1, 2, 5, 10.
* 12 jest liczbą złożoną, ponieważ 12 = 2 ⋅ 2 ⋅ 3. Dzielniki 12 to 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Oprócz liczb pierwszych i liczb złożonych mamy jeszcze dwóch delikwentów: liczbę 0 oraz liczbę 1. Co można powiedzieć o liczbie 0? Gdy podzielimy 0 przez jakąkolwiek liczbę, dostajemy 0, czyli 0 zawsze dzieli się bez reszty. W takim razie 0 jest podzielne przez dowolną liczbę, więc każda[[21]](#footnote-21) liczba jest dzielnikiem 0. Skoro tak, to na pewno 0 nie jest liczbą pierwszą. Poza tym 0 nie da się zapisać w postaci iloczynu liczb pierwszych, więc 0 nie jest też liczbą złożoną. A co się dzieje z 1? Jedynka ma tylko jeden dzielnik: 1. Nie kwalifikuje się więc do liczb pierwszych, bo te mają 2 dzielniki. Tym bardziej nie jest liczbą złożoną.

Każda liczba oprócz 0 i 1 jest liczbą pierwszą albo liczbą złożoną. Zarówno jednych, jak i drugich, jest nieskończenie wiele.

Rozkład na czynniki pierwsze

Warsztat

Ogłosiliśmy dumnie, że każda liczba złożona jest iloczynem jakichś liczb pierwszych. Pytanie tylko, jakich? Gdy uda nam się wyłuskać z liczby informację o tym, z jakich liczb pierwszych się składa, dokonamy jej rozkładu na czynniki pierwsze, zwanego tez *faktoryzacją*. Jak to robimy? Dość żmudnie. Weźmy pod lupę liczbę 120. Zastanówmy się najpierw, czy liczba ta będzie miała w rozkładzie 2, czyli czy można zapisać 120 jakoś tak: 120 = 2 ⋅ … ⋅ … ⋅ … ⋅ …

120 dzieli się przez 2, ponieważ 120 : 2 = 60, czyli inaczej mówiąc 120 = 2 ⋅ 60. Tak oto dwójka pojawiła się w rozkładzie. Niestety to nie koniec. Chcemy rozbić 120 na taki iloczyn, w którym pojawiają się tyko liczby pierwsze, a 60 taką nie jest. W takim razie jeśli uda nam się rozbić liczbę 60, to poznamy też pełen rozkład 120. W takim razie bierzemy 60 i pytamy, czy w jej rozkładzie występuje 2. Stwierdzamy, że 60 : 2 = 30, czyli 60 = 2 ⋅ 30. Mamy więc 120 = 2 ⋅ 60 = 2 ⋅ 2 ⋅ 30. Teraz bierzemy 30 i pytamy, czy dzieli się przez 2. Ponieważ 30 : 2 = 15, to 30 = 2 ⋅ 15, a więc 120 = 2 ⋅ 60 = 2 ⋅ 2 ⋅ 30 = 2 ⋅ 2 ⋅ 2 ⋅ 15. Teraz bierzemy 15. Piętnaście nie dzieli się na 2, ponieważ 15 : 2 = 7 r. 1. W takim razie 15 nie posiada 2 w swoim rozkładzie. No to może posiada 3? Dzielimy 15 : 3 = 5, czyli mamy 15 = 3 ⋅ 5. Sukces. Piszemy ostatecznie:

120 = 2 ⋅ 60 = 2 ⋅ 2 ⋅ 30 = 2 ⋅ 2 ⋅ 2 ⋅ 15 = 2 ⋅ 2 ⋅ 2 ⋅ 3 ⋅ 5

Na koniec otrzymaliśmy 5, a 5 jest liczbą pierwszą. W takim razie rozkład 120 na czynniki pierwsze wygląda tak: 120 = 2 ⋅ 2 ⋅ 2 ⋅ 3 ⋅ 5.

Gdy przeprowadzamy rozkład na czynniki, formalnie stosujemy taki zapis: rysujemy pionową kreskę, po lewej na górze piszemy liczbę do rozkładu.

|  |  |
| --- | --- |
| 120 |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Szukamy liczby pierwszej, która dzieli 120. Znajdujemy 2, więc zapisujemy 2 z prawej i wykonujemy dzielenie. Wynik zapisujemy poniżej z lewej.

|  |  |
| --- | --- |
| 120 | 2 |
| 60 |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Powtarzamy czynności: szukamy dzielnika pierwszego liczby 60, dzielimy i piszemy wynik pod spodem.

|  |  |
| --- | --- |
| 120 | 2 |
| 60 | 2 |
| 30 |  |
|  |  |
|  |  |

Idziemy dalej, aż do skutku.

|  |  |
| --- | --- |
| 120 | 2 |
| 60 | 2 |
| 30 | 2 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 |  |

Na koniec z dzielenia dostaliśmy 1 i tu nasza praca się kończy – nie znajdziemy już liczby pierwszej, na którą rozkłada się 1. Po prawej stronie kreski widzimy wszystkie liczby pierwsze z rozkładu. Odczytujemy, że 120 = 2 ⋅ 2 ⋅ 2 ⋅ 3 ⋅ 5. Zobaczmy jeszcze podobne przykłady:

|  |  |
| --- | --- |
| 630 | 2 |
| 315 | 3 |
| 105 | 3 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 |  |

630 = 2 ⋅ 3 ⋅ 3 ⋅ 5 ⋅ 7

|  |  |
| --- | --- |
| 440 | 2 |
| 220 | 2 |
| 110 | 2 |
| 55 | 5 |
| 11 | 11 |
| 1 |  |

440 = 2 ⋅ 2 ⋅ 2 ⋅ 5 ⋅ 11

|  |  |
| --- | --- |
| 24310 | 2 |
| 12155 | 5 |
| 2431 | 11 |
| 221 | 13 |
| 17 | 17 |
| 1 |  |

24310 = 2 ⋅ 5 ⋅ 11 ⋅ 13 ⋅ 17

Mówimy, że rozkład na czynniki pierwsze jest *jednoznaczny*, to znaczy, że jedna liczba nie może zostać rozłożona na czynniki pierwsze w różny sposób.

NWD i NWW

Intuicje

Temat rozdziału brzmi jak nazwa partii politycznej Polski Ludowej, ale nie jest to nic równie strasznego.

NWD to skrót od „największy wspólny dzielnik”. Gdy rozważamy dwie liczby, powiedzmy 30 i 75, możemy wypisać wszystkie dzielniki jednej liczby i wszystkie dzielniki drugiej liczby.

* Dzielniki liczby 30 to 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 i 30.
* Dzielniki liczby 75 to 1, 3, 5, 15, 25 i 75.

Gdy przyjrzymy się im uważnie, zauważymy, że niektóre dzielniki występują zarówno w pierwszej, jak i w drugiej liczbie. Takie dzielniki nazywamy *dzielnikami wspólnymi* tych liczb.

* Dzielniki wspólne liczb 30 i 75 to 1, 3, 5 i 15.

Największy spośród tych dzielników to właśnie NWD tych liczb. W przypadku liczb 30 i 75 ich największy wspólny dzielnik to 15. Zapisujemy to symbolicznie: NWD(30, 75) = 15.

* Szukamy NWD(30, 42). Dzielniki 30 to 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Dzielniki 42 to 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. W takim razie NWD(30, 42) = 6.
* Szukamy NWD(28, 70). Dzielniki 28 to 1, 2, 4, 7, 14, 28. Dzielniki 70 to 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70. W takim razie NWD(30, 42) = 14.
* Szukamy NWD(60, 105). Dzielniki 60 to 1, 2, 3, 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30 i 60. Dzielniki 105 to 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. W takim razie NWD(60, 105) to 15.

NWW to skrót od „najmniejsza wspólna wielokrotność”. Gdy pomnożymy jakąś liczbę przez dowolną inną, otrzymamy jej *wielokrotność*.

* Kolejne wielokrotności liczby 5 to 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60… Są to wyniki mnożenia 5 przez kolejne liczby naturalne, czyli 1 ⋅ 5, 2 ⋅ 5, 3 ⋅ 5, 4 ⋅ 5, 5 ⋅ 5…
* Kolejne wielokrotności liczby 12 to 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180… czyli inaczej 1 ⋅ 12, 2 ⋅ 12, 3 ⋅ 12, 4 ⋅ 12, 5 ⋅ 12, 6 ⋅ 12…
* Kolejne wielokrotności liczby 21 to 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189, 210… każda kolejna wielokrotność jest o 21 większa od poprzedniej.

Możemy wziąć dwie liczby, np. 12 i 21 i wypisać dla każdej z nich kilka początkowych wielokrotności. W końcu musi się zdarzyć, że wielokrotność jednej i drugiej będzie taka sama. Taka wielokrotność to *wspólna wielokrotność* tych liczb. Dla 12 i 21 mamy na przykład wspólne wielokrotności 84 i 168. Gdybyśmy szukali dalej, znaleźlibyśmy ich dużo więcej, a nawet dowolnie dużo więcej. Najmniejsza spośród wspólnych wielokrotności dwóch liczb to ich NWW. Możemy zapisać symbolicznie NWW(12, 21) = 84.

Poszukiwanie wspólnej wielokrotności można przedstawić bardziej obrazowo. Weźmy liczby 4 i 6. Ustawmy kulki jedna za drugą i ponumerujmy je od 1 wzwyż. W pierwszym rządku pomalujemy te kule, których numer jest wielokrotnością 4. W drugim rządku te kule, których numer jest wielokrotnością 6.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Tam, gdzie kule są pomalowane obydwu rządkach, mamy wspólne wielokrotności obydwu liczb. Wspólne wielokrotności 4 i 6 to m.in. 12 i 24. Dla 5 i 6 mamy z kolei:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Najmniejszą wielokrotność napotkaliśmy dopiero przy 30.

Rozszerzenie

Mówimy, że dwie liczby są *względnie pierwsze*, jeśli ich NWD wynosi 1. Nie możemy wtedy znaleźć żadnej sensownej[[22]](#footnote-22) liczby, przez którą można podzielić i jedną, i drugą.

* Liczby 5 i 6 są względnie pierwsze, ponieważ nie mają wspólnego dzielnika innego niż 1.
* Liczby 12 i 35 są względnie pierwsze, ponieważ nie mają wspólnego dzielnika innego niż 1.
* 42 i 77 nie są względnie pierwsze, ponieważ 7 dzieli obydwie liczby.

Gdy rozważamy więcej niż dwie liczby, mówimy że są względnie pierwsze, gdy największy wspólny dzielnik wszystkich tych liczb wynosi 1.

* Liczby 3, 5 i 7 są względnie pierwsze.
* Liczby 22, 23, 39 i 85 są względnie pierwsze.
* Liczby 24, 12 i 7 są względnie pierwsze, mimo że 24 i 12 nie są względnie pierwsze.

Jeśli chcemy podkreślić, że wśród wielu liczb dowolne dwie są ze sobą względnie pierwsze, mówimy, że są *parami względnie pierwsze*.

* 24, 12 i 7 są względnie pierwsze, ale nie są parami względnie pierwsze.

Najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb względnie pierwszych jest ich iloczynem. Wynika to z bardziej ogólnego twierdzenia:

Iloczyn NWW i NWD dwóch liczb jest równy iloczynowi tych liczb.

Dowód

Eh…

1. Może zawierać śladowe ilości orzechów arachidowych. [↑](#footnote-ref-1)
2. Zapewne na tym, że ziemniaki to nie kamienie, chociaż to kwestia długości gotowania. [↑](#footnote-ref-2)
3. czyt. „trzy nie dzieli siedmiu” – nie zaś „trzyłsiedem” [↑](#footnote-ref-3)
4. czyt. „dziewięć nie dzieli dwudziestu” – nie zaś „dziewięćłdwadzieścia” [↑](#footnote-ref-4)
5. Dokładniej 00 [↑](#footnote-ref-5)
6. **[?]** Udowadniamy twierdzenie dla liczby 0. [↑](#footnote-ref-6)
7. **[?]** Przystępujemy do kroku indukcyjnego. [↑](#footnote-ref-7)
8. **[?]** Przykładowo liczbę 158 możemy zapisać jako . wynosi tu 2. [↑](#footnote-ref-8)
9. **[?]** Krok indukcyjny zakłada, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczby . Liczba to suma cyfr mnożonych liczby a. [↑](#footnote-ref-9)
10. **[?]** Jeśli cyfra jedności jest mniejsza niż 9, to zwiększenie liczby o 1 po prostu zwiększa cyfrę jedności o 1. [↑](#footnote-ref-10)
11. **[?]** Dla tego przypadku nowa suma cyfr mnożonych będzie o 1 większa w stosunku do starej. [↑](#footnote-ref-11)
12. **[?]** Bardziej problematyczny jest przypadek, gdy ostatnia cyfra liczby jest równa 9 – wtedy zmiany w cyfrach będą bardziej drastyczne. Interesuje nas, ile ostatnich cyfr tej liczby wynosi 9. Przykładowo dla liczby 2 091 999 trzy ostatnie cyfry wynoszą 9, więc , , . Liczba ma wartość 2. [↑](#footnote-ref-12)
13. **[?]** Gdy zwiększymy taką liczbę o 1, wszystkie końcowe dziewiątki wyzerują się, a dopiero następna cyfra zwiększy się o 1. [↑](#footnote-ref-13)
14. **[?]** W tym miejscu patrzymy, jak nowa suma cyfr mnożonych zmieniła się w stosunku do starej. Różnica jest taka, że wszystkie ostatnich cyfr zmniejszyło się z 9 do 0, więc suma cyfr będzie mniejsza o . Oprócz tego następna cyfra zwiększyła się o 1, więc suma cyfr będzie większa o . [↑](#footnote-ref-14)
15. **[?]** Przykładowo liczbę 158 możemy zapisać jako . wynosi tu 2. [↑](#footnote-ref-15)
16. **[?]** Jeśli liczba ma cyfr lub mniej, to liczba utworzona przez ostatnich cyfr to ta sama liczba. Wtedy twierdzenie jest mało pomocne. [↑](#footnote-ref-16)
17. Bardzo głębokie pytanie [↑](#footnote-ref-17)
18. Jeśli żyjesz w dalekiej przyszłości i problem ten jest już rozwiązany, zgłoś proszę tę nieścisłość do administracji strony. [↑](#footnote-ref-18)
19. Czyli kilka pierwszych liczb pierwszych [↑](#footnote-ref-19)
20. Jeśli nie wiesz, czym są atomy, pozwolimy Ci cierpieć z powodu niewiedzy. [↑](#footnote-ref-20)
21. Oprócz 0. Pamiętajmy. [↑](#footnote-ref-21)
22. z całym szacunkiem dla jedynki [↑](#footnote-ref-22)